Hva = en ligning?

Sist oppdatert: 15. november 2003

I dette kapittelet skal vi se på noen grunnregler for løsning av ligninger med én ukjent. Det viser seg at balanse er et helt sentralt prinsipp når man skal gå igang med ligninger — akkurat som ved vektløfting! Også her avslutter vi gjennomgåelsen av reglene med noen filosofiske tankevekkere, både for elever og lærere.

Takk til matematikklærer Jon Haugstad som har skrevet denne serien og som har gitt oss tillatelse til å tilrettelegge den og publisere den på Skoletorget.

Å løse en ligning betyr å forenkle et matematisk uttrykk som inneholder en eller flere ukjente størrelser. Målet er å finne den eksakte mengde på denne (eller disse) størrelsene.

For å finne den / de ukjente setter vi opp et regnestykke med et likhetstegn i midten. Dette betyr at mengden på venstre side av likhetstegnet skal være nøyaktig lik mengden på høyre side — akkurat som på en vekt.

Når en delmengde består av en ukjent faktor, må vi finne ut hvor stor mengde denne faktoren har. Det er nærliggende å sammenligne med torghandleren, som legger fisken på den ene skålen i vekten og endel lodd i den andre. Når han summerer «mengdene» i loddene, vet han hvor mye fisken veier.

Et annet eksempel er hentet fra idretten. En vektløfter lesser på så mye vekter som han greier å løfte. Ikke bare det, han må også passe på at det er like mange kilo på hver side av stanga.

Kjell Jensen (til venstre) vant VM i vektløfting i 1973. Senere vant han også olympisk gullmedalje. Vektløfteren må passe nøye på at det er like mange kilo på hver side av stanga. Her løfter Jensen 147,5 kg.

Forskjellen mellom torghandleren, vektløfteren, og en matematiker, er at den siste kan legge på så mye som han vil på begge sider, uten at noen vekt knekker, eller en idrettsmann går i gulvet.

Forskjellene mellom Jensen og Wiles er mange. Wiles kan ikke løfte 147,5 kilo, og Jensen kan neppe løse ligningene til Wiles. Jensen kan ikke gange med 2 kg på hver side av stanga — da går han på trynet. Wiles kan gange med så mye han vil uten at tallene detter ned fra tavlen. Men begge har det felles at de må passe på at det er like mye på hver side!

Andrew Wiles (til venstre) er en av de største nålevende matematikere. Han lever så å si av ligninger. Mens vi andre dødelige har nok med å finne den ukjente x, opererer Wiles med et helt alfabet av ukjente faktorer i sine ligninger.

Vi forenkler

I det følgende skal også vi passe på at det blir like mye på hver side. Det gjør vi ved å bestemme verdien på den ukjente. Da må vi gjøre som Al Khwarizmi: vi må forenkle!

Regel 2:
Ligninger kan forenkles ved å legge til like mye på hver side.

Eksempel 1

Problem:

$$x - 2 = 3$$

Vi flytter alle kjente tall over på høyre side. Det gjør vi ved å legge til 2 på hver side av likhetstegnet. Vi får:

$$x - 2 + 2 = 3 + 2$$

Dette fører til løsningen:

$$x = 5$$

Regel 3:
Ligninger kan forenkles ved å legge til like mye på hver side.

Eksempel 2

Problem:

$$x + 5 = 7$$

Vi flytter alle kjente tall over på høyre side. Det gjør vi ved å trekke fra 5 på hver side. Vi får:

$$x + 5 - 5 = 7 - 5$$

Dette fører til løsningen:

$$x = 2$$

Det vi egentlig har gjort ovenfor, er ikke annet enn å flytte de hele tallene over på høyre side.

Regel 4:
Ligninger kan forenkles ved å trekke fra like mye på hver side.

Eksempel 3

Problem:

$$x/2 = 5$$

Fremdeles er det likegyldig hvor mye det er på hver side. På venstre side har vi halvparten av x. Vi vil vite hva x er, og da må vi multiplisere med 2. Samtidig må vi passe på å multiplisere med 2 også på høyre side, og vi får derfor:

$$2 \cdot x/2 = 2 \cdot 5$$

Nå skal vi forkorte på venstresiden. Det kan vi gjøre ved å stryke tallet «2» i teller og nevner — for 2x delt på 2 er jo det samme som x. Vi får da følgende svar på problemet:

$$x = 2 \cdot 5 = 10$$

Regel 5:
Ligninger kan forenkles ved å multiplisere med like mye på hver side.

Eksempel 4

Problem:

«Hva = en ligning?»

$$5x = 10$$

For å få en enslig x på venstre side, må vi nå dividere på hver side med 5, og vi får løsningen:

$$5x/5 = 10/5$$

På samme måte som i forrige eksempel stryker vi nå tallet «5» i teller og nevner, og ender opp med resultatet:

$$x = 2$$

Regel 6:
Ligninger kan forenkles ved å dividere med like mye på hver side.

Eksempel 5

Problem:

$$2x/3 + 2x/5 = x + 5$$

Her må vi først må finne fellesnevneren for nevnerne 3 og 5. Fellesnevneren er 15. For at begge brøkuttrykkene skal få samme nevner, må derfor 3 multipliseres med 5 og 5 multipliseres med 3:

$$2x \cdot 5/3 \cdot 5 + 2x \cdot 3/5 \cdot 3 = x + 5$$

Legg merke til at det å multiplisere nevner og teller med samme tall ikke endrer størrelsen på uttrykket på høyresiden. Derfor trenger vi heller ikke å gjøre noe med venstresiden i uttrykket (x + 5) i forbindelse med denne operasjonen. — Dette gir oss følgende:

$$10x/15 + 6x/15 = x + 5$$

Siden begge brøkuttrykkene nå har samme nevner, kan vi legge sammen det som står i tellerne på vanlig måte:

$$16x/15 = x + 5$$

Og når vi først er kommet så langt, er det bare å benytte seg av regel 5 ovenfor, regelen som sa at ligninger kan forenkles ved å multiplisere med like mye på hver side. På denne måten får vi fjernet brøken på venstre side (husk at både «x» og «5» på høyresiden skal multipliseres med 15):

$$16x = 15x + 75$$

Så må vi få alle x'ene over på venstresiden. Dette gjør vi slik:

$$16x - 15x = 15x - 15x + 75$$

Da blir vi til slutt stående igjen med:

$$x = 75$$

Regel 7:
Når ligninger består av brøker som har ulike nevnere, må nevnerne gjøres like. Det gjøres ved å multiplisere med samme tall oppe og nede for hver brøk.

Filosofiske spørsmål

1. *Å løse ligninger handler som vi så om å finne den rette balansen. Hvis vi glemmer å balansere, tipper ligningen over til en av sidene og vi får galt svar. Utenfor matematikken hender det ofte at mennesker mister balansen: mennesker blir sinte, de glemmer å tenke før vi snakker osv. Men det er lov, det er helt OK (i hvert fall av og til…). Hvorfor er det aldri OK å miste balansen i matematikken? Eller er det kanskje det? Kan det noen ganger rett og slett være bra å ende opp med galt svar?*

2. *Etter hvert «problem» serverte vi «regler». Men hva er egentlig en regel? Her er noen forslag til definisjoner. Hvilket forslag synes du er den som best forklarer hva en regel er:*

   – En regel oppsummerer det vi nettopp har gjort.
   – En regel forsøker å si med ord det alle gjør uten å være klar over det.
   – En regel forklarer hvordan noe skal gjøres uten å gå i detaljer.
   – En regel sier noe alment og universelt som gjelder for mange enkelttilfeller.
   – En regel er en sannhet som alle er forpliktet til å følge.

3. *Forsøk å lage én regel for hvert av disse tilfellene:*

   – Du åpner kjøleskapet, tar ut en uåpnet melkekartong og setter den på bordet. Så tar du en kniv og skjærer den over på midten – mens kald melk fosser utover bord, duk, stoler… (Hm, du kommer til å få kjeft for dette, men det er ikke så farlig akkurat nå.) Når kartongen er ferdig skåret over, ser du at den nederste delen er (nesten) full med melk, den øverste delen er helt tom.

   – Du ligger og sover. Plutselig setter vekkerklokken i en forferdelig ringing. Du er mektig irritert over å bli vekket nå som du sov så godt så du deiser til vekkerklokken så den knuses mot veggen. Du snur deg om og sover videre.

   – Du har to gir på sykkelen din. Det første er konstruert slik at 1 omdreining på pedalene bringer deg 5 meter fremover; det andre bringer deg 10 meter fremover for hver omdreining. Idag har du syklet 8364 meter og du har brukt det første giret 25% og andre giret 75% av turen. Men nå orker du ikke å regne ut hvor mange omdreininger turen besto av.